РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ

Краткие теоретические сведения. Основные формулы при расчетах на прочность

Для надежной работы различных элементов конструкций, испытывающих изгиб, необходимо соблюдение условий прочности и жесткости.

Очевидно, что материал не в состоянии выдерживать бесконечную нагрузку и бесконечно большие напряжения. Поэтому, величины наибольших напряжений, исходя, из условий надежности работы детали, должны быть ограничены предельными значениями, которые называются допускаемыми нормальными и касательными напряжениями и обозначаются $[\sigma]$и $[\tau]$.

На практике встречаются три вида расчетов:

- по известной нагрузке подбираются необходимые размеры поперечного сечения детали - проектировочный расчет (задачи 1-го вида);
- по известным материалу и размерам конструкции, необходимо выяснить выдержит ли деталь, заданную нагрузку – проверочный расчет (задачи 2-го вида);
- по известным материалу, размерам и схеме нагружения требуется найти допустимую величину нагрузки – расчет на грузоподъемность (задачи 3-го вида).

4.1.1 Задачи 1-го вида. По известным нагрузкам подобрать размеры поперечного сечения - (проектировочный расчет).

Порядок решения задачи:

По эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов определить опасное сечение, где изгибающий момент достигает максимума M_{max} и сечение, в котором $Q = Q_{max}$.

Провести расчет на основе двух условий прочности:

- по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]. \tag{4.1}$$

в этом случае, размеры поперечного сечения определяются по формуле:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \tag{4.2}$$

- по касательным напряжениям (проверочный расчет):

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{h_p \cdot J_x} < [\tau]. \tag{4.3}$$

Сделать дополнительную проверку прочности подобранного профиля по 4-й или 5-й гипотезам прочности в зависимости от материала:

- балки из эластичных материалов $\sigma_Э^{IV} \le [\sigma]$, (4.4)

- балки из хрупких материалов $\sigma_Э^{V} \le [\sigma_p]$. (4.5)

4.1.2 По заданным размерам сечений и $[\sigma]$ проверить может ли деталь выдержать приложенную нагрузку - (проверочный расчет).

Порядок выполнения проверочного расчета:

Определить положение опасного сечения с M_{max} и Q_{max}, а также сечений, в которых M и Q достигают достаточно больших значений.

Найти максимальную величину нормального напряжения в опасном сечении и сравнить с допускаемым, $\sigma_{max} \le [\sigma]$.

Сравнить экстремальное значение касательного напряжения с допускаемым, $\tau_{max} \le [\tau]$.

Определить эквивалентное напряжение $\sigma_Э$ и сравнить с допускаемым напряжением $[\sigma]$.

4.1.3 Найти допускаемую нагрузку по известным размерам и схеме нагружений.

Порядок определения грузоподъемности балки:

Находятся все расчетные сечения, как в задаче 2-го вида, в том числе опасное с M_{max}.

Определяются P_{max}, M_{max} и q_{max} по условиям прочности по нормальным напряжениям.

Вычисляются P_{max}, M_{max} и q_{max} из условия прочности по касательным напряжениям.

Определяются P_{max}, M_{max} и q_{max} из условия прочности по 4-й или 5-й теориям прочности.

Предельная грузоподъемность данной конструкции оценивается минимальными значениями экстремумов $P_{max} = min$, $M_{max} = min$ и $q_{max} = min$, найденными в предыдущих пунктах.

Теоретические сведения. Основные формулы, применяемые при расчетах на жесткость

Данный расчет проводится после вычислений на прочность и выполняется в виде проверки условия жесткости, ограничивающего величину деформаций (прогибов) балки. Оценка жесткости в данной работе ведется на основе метода начальных параметров.

Порядок проведения расчета:

Выбирается начало координат (как правило, это крайняя левая точка балки) и записываются уравнения прогибов и углов поворота для каждого из участков предложенной балки.

Определяются начальные параметры y_0 и θ_0, используя граничные условия.

Подсчитываются прогибы для нескольких сечений балки, и строится эпюра ее изогнутой оси.

Определяется максимальный прогиб y_{max} и сравнивается с допускаемым значением $[f]$, проверив условие жесткости:

$$y_{max} = f \le [f]. \tag{4.6}$$

Количество сечений, в которых находится прогиб, должно быть достаточным для определения характера деформирования балки. При этом график прогиба должен полностью соответствовать эпюре изгибающих моментов.

4.2.1 Метод начальных параметров. Существуют две классические схемы (рисунок 11).

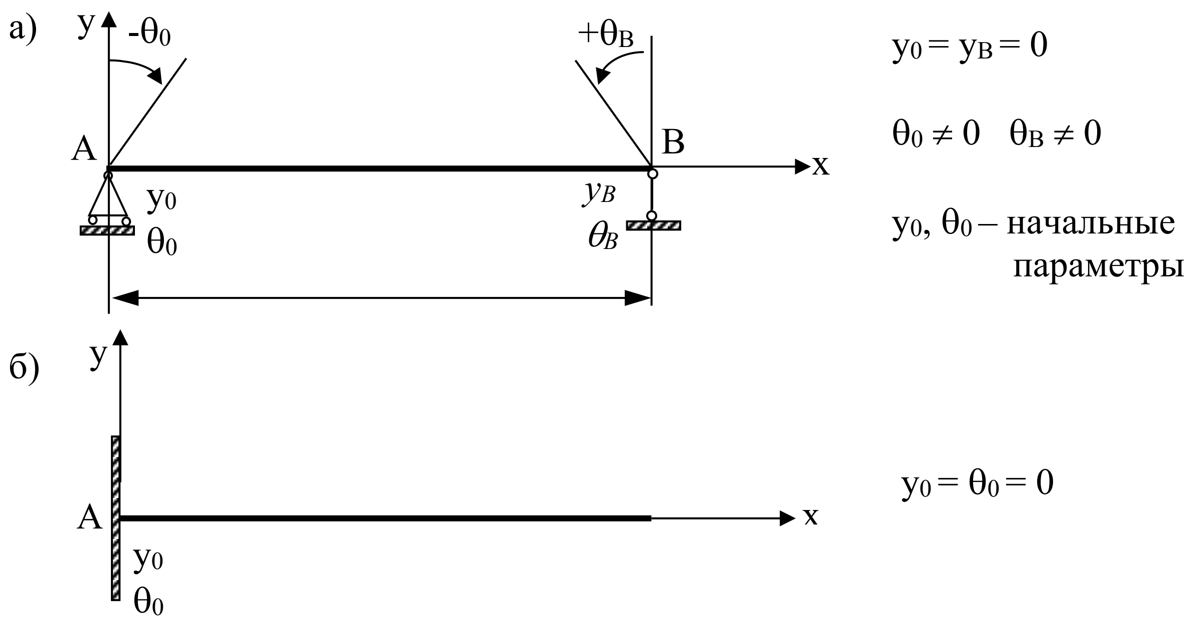


Рисунок 11

- уравнение для определения прогиба y:

$$EJ_z y = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 x \pm \frac{\sum M(x-a_M)^2}{2!} \pm \frac{\sum P(x-a_P)^3}{3!} \pm \frac{\sum q(x-a_q)^4}{4!}, \tag{4.7}$$

- универсальная формула для угла поворота θ:

$$EJ_z\theta = EJ_z\theta_0 \pm \sum M\left(x - a_M\right) \pm \frac{\sum P\left(x - a_P\right)^2}{2!} \pm \frac{\sum q\left(x - a_q\right)^3}{3!}. \tag{4.8}$$

где z– расстояние от начала координат до той точки, где определяется прогиб y и угол поворота θ, а параметры $a_м, a_p, a_q$ представляют собой координаты точек приложения силовых факторов M, P и q.

Пример выполнения расчетно-проектировочной работы (РПР № 4) продолжение

Для балки рассмотренной в п. 3.3 (рисунок 10) необходимо произвести расчет на прочность и жесткость при плоском изгибе.

Наибольшее нормальное напряжение $\sigma_{max} \le \left[\sigma\right] = 160 МПа = 160 \cdot 10^3 \frac{кН}{м^2}$, (материал – сталь).

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 МПа = 2 \cdot 10^8 \frac{кН}{м^2}$.

Анализируя эпюры Q и M, можно сделать вывод, что расчетными могут быть следующие сечения балки:

- $Q = 22{,}8 кН, \quad M = 0;$
- $Q = 0, \quad M = 43{,}32 кНм.$

Так как решающим силовым фактором является M_{max}, то проектировочный расчет на прочность будем проводить при $M_{max} = 43{,}32 кНм$ и $Q = 0 кН$.

4.3.1 Вычисляем максимально допустимый момент сопротивления $\left[W_z\right]$:

$$\left[W_z\right] = \frac{M_{max}}{\left[\sigma\right]} = \frac{43{,}32}{160 \cdot 10^3} = 0{,}000271 (м^3),$$

где $M_{max} = 43{,}32 кНм$ – максимальный изгибающий момент.

4.3.2 Определим размеры проектируемых сечений

Формулы для определения моментов сопротивления основных геометрических фигур приведены в приложении Б

4.3.2.1 Для двутавра.

Согласно таблице сортамента примем двутавр № 24, для которого:

$$W_z^{(к)} = 289 (см^3) = 0{,}000289 (м^3),$$
$$F = 34{,}8 (см^2) = 0{,}00348 (м^2).$$

4.3.2.2 Для сечения в виде прямоугольника.

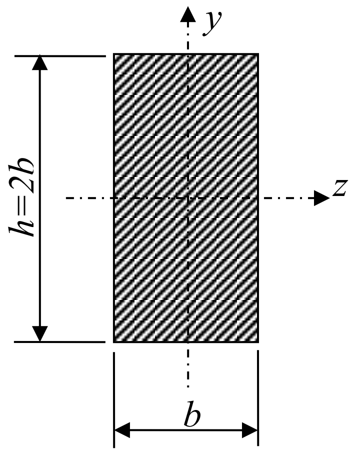


Рисунок 12

Момент сопротивления вычислим по формуле:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = [W_z],$$
$$\frac{b \cdot (2b)^2}{6} = 0{,}000271 \Rightarrow b = 0{,}0741(м).$$

Конструктивно примем $b = 0{,}075(м)$. При этом фактический момент сопротивления и площадь сечения будут равны:

$$W_z^{(к)} = \frac{0{,}075 \cdot (2 \cdot 0{,}075)^2}{6} = 0{,}000281(м^3),$$
$$F = 0{,}075 \cdot 0{,}15 = 0{,}01125(м^2).$$

4.3.2.3 Для круга.

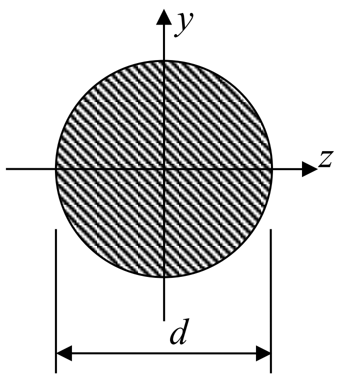


Рисунок 13

Момент сопротивления для круглого поперечного сечения вычислим по формуле:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = [W_z],$$

$$\frac{3{,}14 \cdot d^3}{32} = 0{,}000271 \Rightarrow d = 0{,}1403(м).$$

Примем $d = 0{,}14(м)$. При этом фактический момент сопротивления и площадь будут равны:

$$W_z^{(к)} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}14^3}{32} = 0{,}000269(м^3),$$

$$F = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}14^2}{4} = 0{,}0154(м^2).$$

4.3.3 Произведем оценку перегрузки или недогрузки балки по формуле:

$$\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(к)}}{W_z^{(к)}} 100\% .$$

- для двутавра $\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(к)}}{W_z^{(к)}} 100\% = \frac{0{,}000271 - 0{,}000289}{0{,}000289} 100\% \approx -6\%$,

недонапряжение составляет $6\% (\le 15\%)$;

- для прямоугольника $\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(к)}}{W_z^{(к)}} 100\% = \frac{0{,}000271 - 0{,}000281}{0{,}000281} 100\% \approx -3{,}5\%$,

недонапряжение составляет $3{,}5\% (\le 10\%)$;

- для круга $\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(к)}}{W_z^{(к)}} 100\% = \frac{0{,}000271 - 0{,}000269}{0{,}000269} 100\% \approx 0{,}75\%$,

перенапряжение составляет $0{,}75\% (\le 5\%)$.

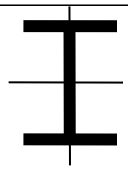
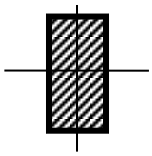
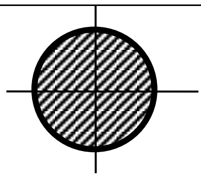
4.3.4 Рассчитаем коэффициент материалоемкости балки используя следующее соотношение

$$K_Э = \frac{F}{F_{\mathrm{I}}},$$

- для поперечного сечения в виде двутавра $K_Э = 1$;
- для прямоугольного сечения $K_Э = \frac{0{,}01125}{0{,}00348} = 3{,}233$;
- для круглого сечения $K_Э = \frac{0{,}0154}{0{,}00348} = 4{,}421$.

4.3.5 Представим в табличной форме результаты расчетов на прочность

Таблица 3- Основные результаты проектных расчетов на прочность

Эскиз сечения	δ_σ, %	F, $м^2$	$\dfrac{F}{F_{\text{I}}}$	Порядок рационального использования профиля по расходу материала
	-6	0,00348	1	1
	-3,5	0,01125	3,233	2
	0,75	0,0154	4,421	3

Так как наиболее экономичным, то есть с наименьшим расходом стали, по сравнению с прямоугольным и круглым сечениями, является двутавр, все дальнейшие расчеты будут проводиться только для *двутаврового поперечного сечения*.

Определим максимальное значение нормального напряжения.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z^{(\kappa)}} = \frac{43{,}32}{0{,}000289} = 149896{,}194\left(\frac{кН}{м^2}\right) \leq 160000\left(\frac{кН}{м^2}\right).$$

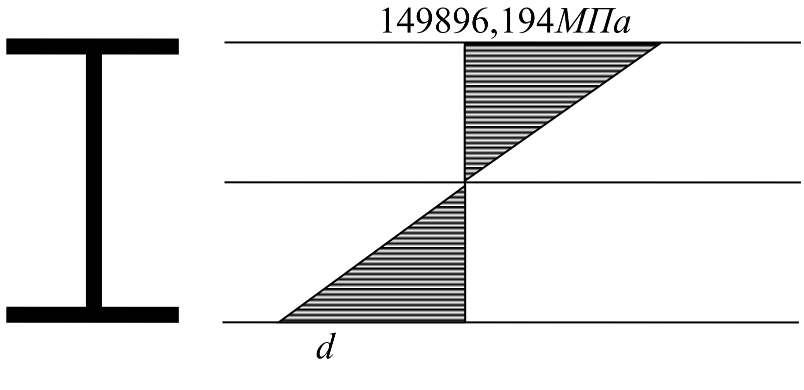


Рисунок 14

4.3.6 Введем систему координат xOy с началом отсчета в крайней левой точке. Составим уравнения метода начальных параметров в общем виде для балки приведенной на рисунке 10:

$$EJ_z y_1 = EJ_z y(x) = EJ_z y_o + EJ_z \theta_o x + \frac{R_A (x-0)^3}{3!} - \frac{q(x-0)^4}{4!},$$

$$0 \le x \le 5;$$

$$EJ_z y_2 = EJ_z y(x) = EJ_z y_o + EJ_z \theta_o x + \frac{R_A (x-0)^3}{3!} - \frac{q(x-0)^4}{4!} - \frac{M(x-5)^2}{2!} + \frac{q(x-5)^4}{4!},$$

$$5 \le x \le 10.$$

Примечание: Начало координат выбирается в крайней левой точке и оно является общим для всех участков.

В случае окончания действия равномерно распределенной нагрузки на первом участке балки, ее действие продлевают до конца второго участка, а для восстановления фактически действующей на балку нагрузки, вводят компенсирующую равномерно распределенную нагрузку, но обратного направления.

4.3.7 По таблице сортамента найдем момент инерции для двутавра № 24 (ГОСТ 8239-72) $J_z = 3460(см^4) = 0{,}0000346(м^4)$.

4.3.8 Определим начальные параметры y_o и θ_o из граничных условий балки на опорах *A* и *B*, где действуют реакции опор R_A и R_B.

На опорах прогибы равны нулю, то есть: при $x = 0,\ y_1 = 0;$ при $x = 10,\ y_2 = 0.$ Из первого граничного условия $y_o = 0$, а из второго:

$$0 = 0 + EJ_z\theta_o \cdot 10 + \frac{22.8(10-0)^3}{3!} - \frac{6(10-0)^4}{4!} - \frac{3(10-5)^2}{2!} + \frac{6(10-5)^4}{4!};$$

$$0 = 0 + EJ_z\theta_o \cdot 10 + 3800 - 2500 - 37{,}5 + 156{,}25;$$

$$EJ_z\theta_o \cdot 10 = -1418{,}75;$$

$$\theta_o = -\frac{141{,}875}{EJ_z}.$$

4.3.9 Вычислим ординаты эпюры $y = y(x)$ для пяти точек геометрической оси балки представленных на рисунке 15, подставив в уравнения прогибов найденные начальные параметры.

$$EJ_z y(x=0) = 0;$$

$$EJ_z y(x=2{,}5) = -305{,}079;$$

$$EJ_z y(x=5) = -390{,}625;$$

$$EJ_z y(x=7{,}5) = -251{,}563;$$

$$EJ_z y(x=10) = 0.$$

где $EJ_z = 2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}0000346 = 6920(кНм^2)$.

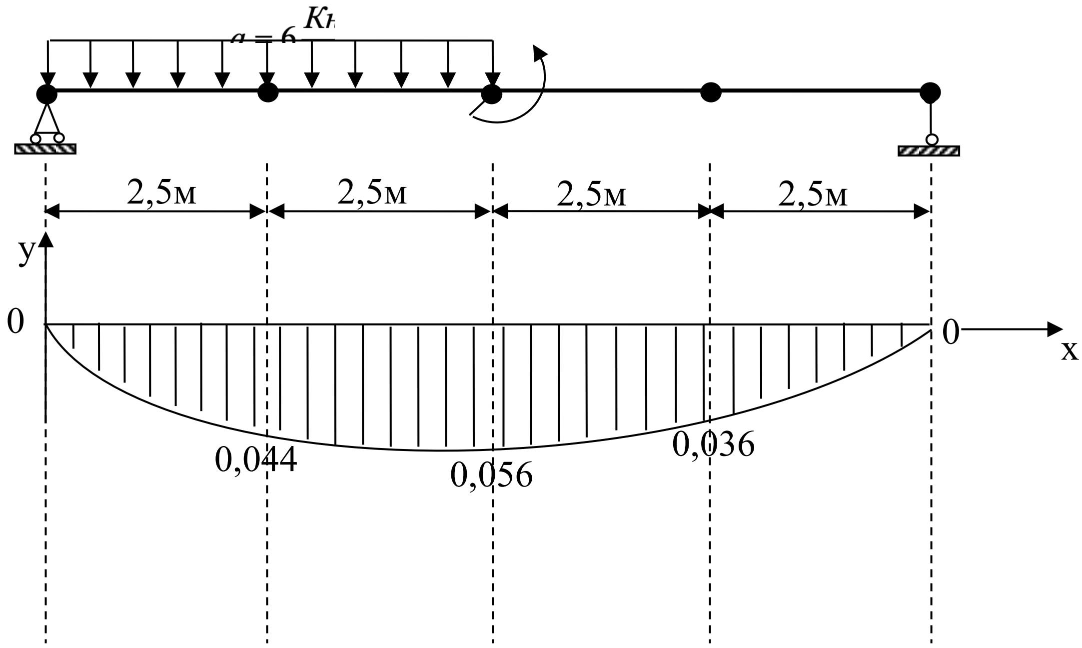


Рисунок 15

После деления на EJ_z, получим искомые прогибы (рисунок 15):

$$x = 0(\,м\,) \quad y = 0(\,м\,);$$

$$x = 2{,}5(\,м\,) \quad y = 0{,}044(\,м\,);$$

$$x = 5(\,м\,) \quad y = 0{,}056(\,м\,);$$

$$x = 7{,}5(\,м\,) \quad y = 0{,}036(\,м\,);$$

$$x = 10(\,м\,) \quad y = 0(\,м\,).$$

4.3.10 Определим наибольшее по модулю перемещение балки $|y_{max}| = f$ и сформулируем условие обеспечивающие ее жесткость:

$$y_{max} = f \le [f],$$

где $[f]$- предельно допустимый прогиб, который принимается по справочно-нормативным источникам в зависимости от предъявляемых к проектируемой конструкции требований. В данной работе $[f]$ не нормируется, то есть остается в буквенном виде.

Примечание. При определении y_o и θ_o кроме рассмотренного примера, возможен и другой вариант граничных условий, например (рисунок 16).

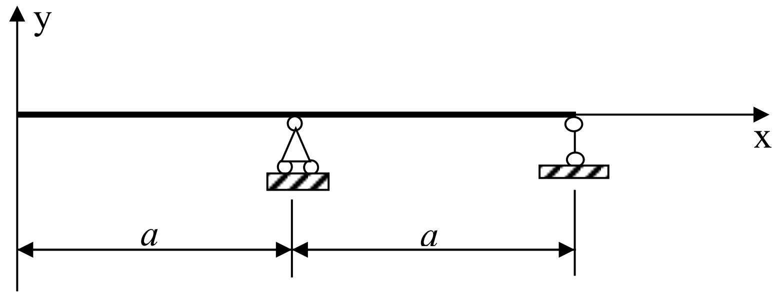


Рисунок 16

В этом случае параметры y_o и θ_o можно найти из решения следующей системы двух уравнений:

$$\begin{cases} z = a \quad EJ_z y(a) = 0, \\ z = 2a \quad EJ_z y(2a) = 0. \end{cases}$$